Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1 + \frac{Puntos}{10}$. **Duración** = 60 minutos

---

1) **[15 ptos.]** Determinar el **coeficiente** de x^{-2} en el desarrollo de

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^7 \left(x - \frac{2}{x}\right)$$

2) **[15 ptos.]** Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la progresión geométrica cuyo primer y cuarto término son 4 y 500, respectivamente. Sea S_n la suma de los primeros n términos de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

   a) **[8 ptos.]** Use el principio de inducción para demostrar que

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})(5^n \geq 4n + 1)$$

   b) **[7 ptos.]** Encuentre una fórmula para S_n y concluya que $S_n \geq 4n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3) **[15 ptos.]** Considere el número complejo

$$z = \frac{3\beta - 2\alpha i}{4 - 3i}$$

Determine los valores de α y β para que z sea un número real de módulo 1.

4) **[15 ptos.]** Calcular

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{i+j}$$

Pauta

1) Desarrollando el binomio, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left(x+\frac{2}{x}\right)^7\left(x-\frac{2}{x}\right) &= \left(\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}x^{7-k}(2x^{-1})^k\right)\left(x-\frac{2}{x}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}2^k\cdot x^{7-2k}x-\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}2^{k+1}\cdot x^{7-2k}x^{-1}\\
&= \sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}2^k\cdot x^{8-2k}-\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}2^{k+1}\cdot x^{6-2k}
\end{aligned}$$

Note entonces que el término x^{-2} aparece en la primera suma para $k\in[0,7]\subset\mathbb{N}$ tal que $8-2k=-2$, es decir, para $k=5$. De modo similar, x^{-2} aparece en la segunda suma para $k\in[0,7]\subset\mathbb{N}$ tal que $6-2k=-2$, es decir, para $k=4$. Por lo tanto, el coeficiente de x^{-2} en el desarrollo es

$$\binom{7}{5}2^5-\binom{7}{4}2^5=2^5(21-35)=32(-14)=-448$$

2) Progresión geométrica e inducción

a) El primer paso de inducción se satisface claramente, pues $1=5^0\geq 4(0)+1=1$.
Ahora, supongamos que la proposición $p(n):\ 5^n\geq 4n+1$ es verdadera. Luego

$$5^{n+1}=5\cdot 5^n=5^n+4\cdot 5^n\underset{\text{Hip. ind.}}{\geq}4n+1+4\cdot 5^n\underset{\text{pues } 5^n\geq 1}{\geq}4n+1+4=4(n+1)+1$$

es decir, la proposición $p(n+1):\ 5^{n+1}\geq 4(n+1)+1$ es verdadera, concluyendo así la demostración.

b) Primero notemos que de la condición $4\cdot r^3=a_3=500$, se tiene que $r=5$. Luego $a_n=4\cdot 5^n$.
Usando directamente la suma de los primeros n términos para una P.G. tenemos que

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}a_k=\sum_{k=0}^{n-1}4\cdot 5^k=4\left(\frac{5^n-1}{5-1}\right)=5^n-1$$

Luego, usando el item anterior, se tiene que $S_n=5^n-1\geq 4n+1-1=4n$.

3) Considerar

$$z = \frac{3\beta - 2\alpha i}{4-3i} \cdot \frac{4+3i}{4+3i} = \frac{12\beta + 9\beta i - 8\alpha i + 6\alpha}{16+9} = \frac{6\alpha + 12\beta}{25} + i\frac{9\beta - 8\alpha}{25}$$

$$\text{Si } z \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Im}(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{9\beta - 8\alpha}{25} = 0 \quad \Rightarrow \quad 9\beta - 8\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{8\alpha}{9}$$

$$\text{Si } |z| = 1 \quad \Rightarrow \quad |\mathrm{Re}(z)| = 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{6\alpha + 12\beta}{25}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad |6\alpha + 12\beta| = 25$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{96\alpha}{9} + 6\alpha\right| = 25 \quad \Rightarrow \quad |150\alpha| = 225 \quad \Rightarrow \quad |a| = \frac{3}{2}$$

$$\text{Si } \alpha = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Si } \alpha = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \beta = -\frac{4}{3}.$$

4)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} 2^{i+j} &= \sum_{i=0}^{n} 2^i \sum_{j=0}^{n} 2^j \\
&= \sum_{i=0}^{n} 2^i \left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right) \\
&= \left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right) \sum_{i=0}^{n} 2^i \\
&= \left(\frac{1-2^{n+1}}{-1}\right)\left(\frac{1-2^{n+1}}{-1}\right) \\
&= (1-2^{n+1})^2.
\end{aligned}$$